Φυλλάδιο #3

Άσκηση 1

Έστω $e=(e_1,\dots,e_4)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$. Από την θεωρία ξέρουμε f διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο $A=[f]_e^e$ διαγωνίσιμος.

Φανερά $A=\begin{bmatrix}3 & a & b & c\\ 0 & 3 & d & e\\ 0 & 0 & 4 & f\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x)=\det(A-xI_4)=(3-x)^2(4-x)^2=(x-3)^2(x-4)^2$

Άρα ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$

3 | πολλαπλ. 2

4 | -ΙΙ- 2

Από την θεωρία A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow \dim V_A(3)=\dim V_A(4)=2$

$A-3I_4=\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Ξέρουμε από γραμμική 1 ότι $\dim V_A(3)+\operatorname{rank}(A-3I_4)=4$

Ο A ορίζει γραμμική $S:\mathbb{R}^{4\times1}\to\mathbb{R}^{4\times1}$ με $S(x)=(A-3I_4)x$

Έχουμε $V_A(3)=\ker(S)$

Από γραμμική Ι $\dim \operatorname{Im} S=$ βαθμίδα$(A-3I_4)$ και

$4=\dim\mathbb{R}^{4\times1}=\dim_{\mathbb{R}}\ker S+\dim \operatorname{Im} S$

$=\dim_{\mathbb{R}} V_A(3)+$ βαθμίδα$(A-3I_4)$

Αν $a\neq 0_{\mathbb{R}}$ $A-3I_4$ έχει rank $=3$ γιατί η 3×3 υποορίζουσα $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a\neq0$

Άρα πρέπει $a=0$ και τότε πράγματι ο $A-3I_4$ έχει βαθμίδα $=2$ γιατί έχει δύο μηδενικές στήλες άρα κάθε 3×3 υποορίζουσα του $A-3I_4$ είναι μηδέν ενώ η 2×2 υποορίζουσα $\begin{vmatrix}1 & f\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq0$

Έχουμε $A-4I_3=\begin{bmatrix}-1 & a & b & 1\\ 0 & 1 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ και όπως προηγουμένως $\dim_{\mathbb{R}} V_A(4)=2 \Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A-4I_3)=3$ όπως προηγουμένως βλέπουμε

με $f\neq 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ βαθμίδα $(A-4I_3)=3$

$f=0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A-4I_3)=2$

Επομένως ο A είναι διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow a=f=0_{\mathbb{R}}$ άρα f διαγωνίσιμη

Άσκηση 4

$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}1-x & 0 & 0\\ 1 & -x & 0\\ 0 & 1 & -x\end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix}-x & 0\\ 1 & -x\end{vmatrix}=-x^3+x^2+x-1$

Άρα από θεώρημα Cayley-Hamilton $\chi_A(A)=0$ επομένως $E^4=E+E^2-I_3$ ... E^2, I_3

Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ...

Απόδειξη Για $n=3$ ισχύει όπως είδαμε. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 3$ ισχύει $P(n)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει η $P(n+1)$. Αφού η $P(n)$ ισχύει $\Rightarrow E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3$

Έχουμε $E^{n+1} = E\,\underbrace{E^n}_{\text{λόγω } P(n)} = E(E^{n-2} + E^2 - I_3) = E^{n-1} + \underbrace{E^3 - E}_{\text{από } P(3)} = E^{n-1} + E + E^2 - I_3 - E = E^{n-1} + E^2 - I_3$

Άρα η $P(n+1)$ ισχύει έτσι από μαθηματική επαγωγή $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq 3$

$E^{100} = E^{98} + E^2 - I_3$

$E^{98} = E^{96} + E^2 - I_3$

$E^4 = E^2 + E^2 - I_3$

Προσθέτοντας, $E^{100} = 49(E^2 - I_3) + E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ελάχιστο πολυώνυμο (υπολογισμός) $\chi_A(x) = (1-x)(x^2-1) = -(x-1)^2(x+1)$

Άρα 2 υποψήφια ελάχιστα πολυώνυμα: $(x-1)(x+1)$ ή $(x-1)^2(x+1)$

Παρατηρούμε ότι $(x-1)(x+1)$ δεν μηδενίζει τον E γιατί $(E-I_3)(E+I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω $e = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $A = [T]_e^e$ τότε $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

Ξέρουμε T διαγωνιοποιήσιμη $\Leftrightarrow A$ διαγωνιοποιήσιμος

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & a \\ 3 & 0 & b-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 3 & b-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x-b)$

2 περιπτώσεις

1η περίπτωση $b=2$ τότε

ιδιοτιμές	πολλαπλότητα
2	3

2η περίπτωση $b \neq 2$ τότε

ιδιοτιμές	πολλαπλότητα
2	3
b	1

1η περίπτωση: $b=2$ τότε $\chi_A(x) = -(x-2)^3$ Άρα $m_A(x) = (x-2)$ ή $m_A(x) = (x-2)^2$ ή $m_A(x) = (x-2)^3$. Ξέρουμε απ' την θεωρία A διαγωνιοποιήσιμος $\Leftrightarrow m_A(x) = x-2$ Αλλά $m_A(A) = A - 2I_3 \neq \mathbb{O}_{3\times3}$ αφού $A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [illegible] & & \\ [illegible] & & \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_{3\times3}$

Άρα διαγωνίσιμος όταν $b=2$

2η περίπτωση Άρα $X_A(x) = (x-2)^2(x-b)$ Τότε ο A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow \dim V_A(2)=2$ και $\dim V_A(b)=1$

Από την θεωρία $\dim V_A(b)\geq 1$ και αφού ο εκθέτης του $(x-b)$ στο $X_A(x)$ είναι 1 $\dim V_A(b)\leq 1$.

Άρα $\dim V_A(b)=1$

Υπολογίζουμε $V_A(2)$: $(A-2I_3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&a\\3&0&b-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} az=0\\ 3x+(b-2)z=0\end{cases}$

Αν $a\neq 0 \Rightarrow z=0, x=0$ Άρα $V_A(2)=\left\{\begin{bmatrix}0\\y\\0\end{bmatrix} y\in\mathbb{R}\right\}$ και διάσταση 1 και άρα A όχι διαγωνίσιμος

Αν $a=0$, το σύστημα γίνεται $3x+(b-2)z=0$ Άρα $V_A(2)=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{(b-2)z}{3}\\y\\z\end{bmatrix} y,z\in\mathbb{R}\right\}$ και $\dim V_A(2)=2$ και A διαγωνίσιμος

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ $b=2$, τότε διαγωνίσιμος

$b\neq 2, a=0$ διαγωνίσιμος

$b\neq 2$ $a\neq 0$ όχι διαγωνίσιμος

ΑΣΚΗΣΗ 5

$X^2=Y^3=\begin{bmatrix}9&0&0\\-5&4&0\\-8&0&1\end{bmatrix}=A$ Έχουμε $X_A(x)=\begin{vmatrix}9-x&0&0\\-5&4-x&0\\-8&0&1-x\end{vmatrix}=(x-1)(x-4)(x-9)$

Επομένως, ο A διαγωνίσιμος επειδή $X_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων με διακεκριμένους παράγοντες. Υπολογίζουμε $V_A(1)$, $V_A(4)$ και $V_A(9)$ και μετά τις πράξεις βλέπουμε

$V_A(9)=\left\{\begin{bmatrix}x\\-x\\-x\end{bmatrix} x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$ $V_A(4)=\left\{\begin{bmatrix}0\\y\\0\end{bmatrix}: y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle$

Θέτουμε $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ Τότε από την θεωρία $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ Θέτουμε $X_1=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$ Έχουμε $X_1^2=D=P^{-1}AP$

$PX_1^2P^{-1}=A \Rightarrow$

$(PX_1P^{-1})^2=A$

Θέτουμε $X = P X_1 P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε $X^2 = A$

Θέτουμε $Y = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Θέτουμε $Y = P Y_1 P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9} & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 1 - \sqrt[3]{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}$